DAG VAN WISKUNDE TE KORTRIJK
TWEEDE EN DERDE GRAAD
ZATERDAG 14 NOVEMBER

WERKWINKEL 11
ONDERZOEKSCOMPETENTIES WISKUNDE
DERDE GRAAD ASO

Samenstelling syllabus en leiding
Luc De Wilde

Inhoud

Onderzoekscompetenties in de derde graad ASO – leerplan a

1. Grasduinend doorheen het leerplan …

Leerplan pagina 18:

ONDERZOEKSCOMPETENTIES

De specifieke eindtermen bevatten een aantal eindtermen betreffende het verwerven van onderzoekscompetenties. De aanpak hiervan wordt toegelicht in de leerplanonderdelen *5.1.1 Vaardigheden* bij *6 Onderzoeksvaardigheden* en in deel *5.2.7 Onderzoekscompetenties*. Omdat het leerproces van de leerlingen hier een aanbrengfase, een verwerkingsfase met eventueel coaching, en mogelijk ook klassikale rapportering en/of presentatie kan inhouden, wordt hiervoor *4 % van de lestijden* voorzien.

Leerplan pagina 22: Vaardigheden

onderzoeksvaardigheden, o.m.
- de onderzoeksopdracht formuleren en afbakenen;
- een aanpak plannen en zo nodig opsplitsen in deeltaken;
- informatie verwerven en op relevantie selecteren, o.m.
  - de waarde van informatie beoordelen in functie van de opdracht;
  - relatie tussen gegevens en beweringen opzoeken en interpreteren;
- een doelmatig wiskundig model selecteren of opstellen, o.m.
  - een onderdeel van een opdracht herkennen als een wiskundig of een statistisch probleem;
  - vaststellen of een model voldoet en het eventueel bijsturen;
  - zo nodig bijkomende informatie verzamelen om het aangewezen model te kunnen hanteren;
- een bij het model passende oplossingsmethode correct uitvoeren;
- de resultaten binnen de context betekenis geven en ze daarin kritisch evalueren;
- reflecteren op het gehele proces, i.h.b. op de gemaakte keuzen voor representatie en werkwijze;
- het resultaat van het onderzoek zinvol presenteren, het standpunt argumenteren en verslag uitbrengen van het proces.

Leerplan pagina 36: logaritmische schaal

Leerplan pagina 41:

U	UITBREIDING
AU8	Bij een probleem, met de middelen van de analyse, een model opstellen en dat gebruiken om het probleem op te lossen.
	De leerlingen beschikken nu over een uitgebreid instrumentarium binnen de analyse en over de nodige probleemoplossende vaardigheden. Als afsluiting van dit deel kunnen ze in het kader van een onderzoeksopdracht het aanwenden hiervan diepgaander gaan beheersen door eens een ruimer probleem aan te pakken, waarvan de oplossing niet meteen voor de hand ligt. Een mogelijkheid daartoe wordt bijvoorbeeld geboden door wat in de les behandeld werd voor oppervlakten en inhouden ten opzichte van de eerste coördinaatas zelfstandig uit te werken voor situaties gekoppeld aan de tweede coördinaatas (bijv. inhoud bij wenteling rond de y-as). Men kan hier uiteraard ook meer praktische problemen aan bod brengen.

Leerplan pagina 48:

Toepassingen van iteratie kunnen in verschillende situaties voorkomen.

- Het herhaaldelijk verschalen van een figuur in de meetkunde.
- Het herhaaldelijk toepassen van dezelfde groep transformaties.
- Met een rekenmachine kan men bijvoorbeeld de vierkantswortel van een getal nemen en daarna de vierkantswortel van het resultaat en dat blijven herhalen.
- De studie van de evolutie van populaties.
- Benaderingsmethodes voor nulpunten van functies.
- Het bepalen van oplossingen voor vergelijkingen of stelsels van vergelijkingen.
- Meetkundige en rekenkundige rijen.
- De oplossing van het probleem van de toren van Hanoi.

Een aantal toepassingen kan als onderzoeksopdracht worden uitgewerkt.

Leerplan pagina 51:

U	UITBREIDING
CU1	Het verband leggen tussen de bewerkingen met complexe getallen en een meetkundige voorstelling.
CU2	Het aantal en de aard van de oplossingen van een veeltermvergelijking met reële coëfficiënten bepalen met behulp van de stelling van d'Alembert.
	Het optellen van twee complexe getallen, het vermenigvuldigen van een complex getal met een reëel getal en de vermenigvuldiging van twee complexe getallen onderling kan men visualiseren in het complexe vlak. De deelbaarheid van een veelterm met reële coëfficiënten door factoren van het type x - a hangt samen met het bestaan van een nulpunt a van de veelterm. Men kan zich dan afvragen of er wel voor elke veelterm nulpunten bestaan. Wanneer a ook een complex getal kan zijn, kan dit probleem opgelost worden door een beroep te doen op de stelling van d'Alembert, dikwijls de hoofdstelling van de algebra genoemd. Het bewijs van de stelling behoort uiteraard niet tot de leerinhouden. Wel kan hieraan een meer theoretische onderzoeksopdracht gekoppeld worden.

Leerplan pagina 52:

K	FRACTALEN
	Dit onderwerp kan deels door de leerlingen via zelfstandige onderzoeksopdrachten verwerkt en gepresenteerd worden.

Leerplan pagina 55: lineaire programmering

Dit onderwerp biedt een aantal mogelijkheden voor onderzoeksopdrachten, bijvoorbeeld bij leerlingen van de studierichting Economie-Wiskunde.

Leerplan pagina 56: financiële algebra

Dit onderwerp biedt een aantal mogelijkheden voor onderzoeksopdrachten, bijvoorbeeld bij leerlingen van de studierichting Economie-Wiskunde.

Leerplan pagina 58: getaltheorie

Hoewel dit onderwerp op het eerste gezicht niet eenvoudig is, lenen bepaalde onderdelen ervan zich tot zelfstudie en groepswerk, als de leerlingen kunnen beschikken over voldoende documentatie.

Leerplan pagina 70-71: lineaire regressie en correlatie

Het is zinvol de behandeling van dit onderwerp te koppelen aan een concrete statistische onderzoeksopdracht.

Onderzoekscompetenties

KERNDOELSTELLINGEN

OC1	Zich oriënteren op een onderzoeksprobleem door gericht informatie te verzamelen, te ordenen en te bewerken.		20
OC2	Een onderzoeksopdracht met een wiskundige component voorbereiden, uitvoeren en evalueren.		21
OC3	De onderzoeksresultaten en conclusies rapporteren en ze confronteren met andere standpunten.		22

Specifieke eindtermen wiskunde en onderzoekscompetenties

De leerlingen kunnen

20 zich oriënteren op een onderzoeksprobleem door gericht informatie te verzamelen, te ordenen en te bewerken.
21 een onderzoeksopdracht met een wiskundige component voorbereiden, uitvoeren en evalueren.
22 de onderzoeksresultaten en conclusies rapporteren en ze confronteren met andere standpunten.

Vijf fasen van een onderzoeksopdracht

1. *De leerling stelt zich een onderzoeksvraag. De leraar kan hiervoor een reeks suggesties doen of één welbepaalde suggestie. Het initiatief kan ook van de leerling komen.*
2. *De leerling werkt aan probleemverkenning : waar vind ik materiaal, kan ik hierbij ICT inschakelen, kan ik het probleem concreet aflijnen, welk(e) aanverwant(e) onderwerp(en) kan ik er eventueel bijnemen … ?*
3. *De leerling stelt een plan van uitvoering op : hoe verdeel ik de opdracht in deelopdrachten, welke timing voorzie ik … ? Hiervoor kan men best een logboek gebruiken.*
4. *De leerling voert het plan uit. Dit kan uiteraard met een groepje leerlingen worden uitgevoerd. Op die manier verwerft men zekere sociale vaardigheden en leert men van elkaar.*
5. *De leerling levert een (meestal) schriftelijke neerslag af. Indien de tijd het toelaat kan men de (groepjes) leerlingen hun werk kort laten presenteren.*

Onderzoeksopdrachten kunnen inhoudelijk aansluiten bij

- de verdieping van bepaalde onderdelen, bijvoorbeeld als die niet in de les worden behandeld;
- de uitbreiding van bepaalde onderdelen, bijvoorbeeld logaritmische schaal, toepassingen van analyse, meetkundige interpretatie van de bewerkingen met complexe getallen, eigenwaarden, krommen en oppervlakken beschrijven, transformaties in de ruimte;
- de keuzeonderwerpen, bijvoorbeeld differentiaalvergelijkingen, convergentie van een reeks, numerieke methoden, iteratie, fractalen, lineaire programmering, financiële algebra, getaltheorie, analytische meetkunde (kegelsneden, krommen), regressie en correlatie, toetsen van hypothesen;
- andere wiskundeonderdelen, bijvoorbeeld niet-euclidische meetkunde, boldriehoeksmeting, geschiedenis van de wiskunde;
- een thematische uitwerking, zoals benadering, simulatie, algoritmisering, invariantie, symmetrie;
- onderwerpen die aansluiten bij een wiskundige ondersteuning van een project binnen de vrije ruimte.

2. Mededeling VVKSO juni 2008

Enkele klemtonen

3. Mogelijke verschillende fasen in een onderzoeksopdracht

- Omschrijving van de situatie
- Omschrijving van het probleem
- Opzoekfase
- Inventariseren van informatie
- Formuleren van vermoeden
- Bewijzen van vermoeden
- Uitbreiding van onderzoek
- Verslaggeving

4. Waar mogelijke (inspiratie voor) onderzoeksopdrachten vinden?

1. Op de site www.examenbundel.nl (examens vwo).
De meeste van de opdrachten die op deze site te vinden zijn horen eigenlijk eerder thuis onder de rubriek 'mathematiseringsopdrachten'. Als 'instap' kan deze site nuttig en zinvol zijn!

2. In het cahier onderzoekscompetenties via www.t3vlaanderen.be (auteur dr. Luc Gheysens)
Dit cahier bevat een 12-tal onderzoeksopdrachten . In elke onderzoeksopdracht wordt geopteerd om de deelopdrachten strikt af lijnen en er wordt verwacht dat de leerlingen een grafische rekenmachine gebruiken bij de uitwerking van de opdrachten. Aan de leraar wordt de keuze gelaten of alle deelopdrachten dienen uitgevoerd te worden. Voor het opzoeken van het nodige materiaal kan men onder andere gebruik maken van het internet.

3. Wiskunde B-dag: http://www.fi.uu.nl/wisbdag/

4. Tijdschrift Uitwiskeling: www.uitwiskeling.be

5. Vanuit eigen klaspraktijk aansluitend bij
- verdieping en / of uitbreiding van bepaalde onderdelen,
- keuzeonderwerpen

Voorbeeld 1: fietsen

Bepaal de traphoogte (in cm) van een fietstrapper t.o.v. de grond in functie van de tijd (in sec) gedurende één (of meerdere) trapomwentelingen bij constante snelheid *v* (in km/h).

1. Concrete invulling van het probleem

Belangrijke voorwaarde om dit probleem op te lossen is dat de snelheid tijdens het fietsen constant is. Het is de bedoeling om de hoogte van de trappers te bestuderen startend vanop het moment dat beide trappers op gelijke hoogte staan én de linkertrapper zich 'achter' de rechtertrapper bevindt. Er wordt verondersteld dat je 'vooruit' fietst …

2. Oplossing van het probleem door te werken met realistische maten voor één fiets (welke maten zijn noodzakelijk om het probleem te kunnen oplossen ?)

De leerlingen sporen informatie op om de afstand (en dus ook de tijd) corresponderend met één trapomwenteling te berekenen.
De leerlingen gaan op zoek naar een 'wiskundig model' dat kan geassocieerd worden met de vraagstelling (traphoogte …).
De leerlingen concretiseren dit model met behulp van de nodige 'fietsmaten'.

Zo bijvoorbeeld:

- wielomtrek gewone fiets *w*: 215,5 cm
  (voor racefiets is dit 213,3 cm en een ATB 208,9 cm)
- snelheid *v*: 20 km/h (tempo van de 'gemiddelde' jeugd …)
- 'versnelling' die men trapt: 48/15 (aantal tanden *N* vooraan: 48,38,28 en aantal tanden *n* achteraan: 11,13,15,17,19,22,25,28)
- lengte trapperstang: 20 cm en hoogte trapas boven de grond: 30 cm

Voor de linkertrapper geldt dat $h_L(t) = 20\sin\frac{\pi}{0{,}62064}t + 30$; voor de rechtertrapper is dit $h_R(t) = -20\sin\frac{\pi}{0{,}62064}t + 30$.

3. Veralgemening van het probleem (van 'cijfers' naar 'letters') naar 'alle fietsen':

Het cijfermateriaal uit 2. wordt veralgemeend tot (opgelet met de eenheden!):

- wielomtrek *w* (in cm)
- snelheid *v* (in km/h)
- 'versnelling' die men trapt: **????** met *N* aantal tanden vooraan en *n* aantal tanden achteraan
- lengte trapperstang: *a* cm en hoogte trapas boven de grond: *b* cm

Voor de linkertrapper geldt dan dat $h_L(t) = a\sin\frac{500\pi nv}{9Nw}t + b$; voor de rechtertrapper is dit $h_R(t) = -a\sin\frac{500\pi nv}{9Nw}t + b$.

Voorbeeld 2: aids-test

Deel 1: een stukje tekstanalyse

Voor een bepaald onderzoek wil men 10 000 personen testen op AIDS. De kans om seropositief te zijn is 0,01.

Bij de bloedanalyse kan men een besparing doen door bvb de bloedmonsters van 25 personen samen te voegen en het mengsel te onderzoeken. Is de uitslag negatief, dan is men zeker dat geen enkele van de 25 personen besmet is; dit is een besparing van 24 proeven. Is de uitslag echter positief, dan moet men van elk van de 25 personen een nieuw bloedmonster analyseren; dan moeten er 26 proeven worden uitgevoerd.

De verwachtingswaarde van de stochast 'het aantal uit te voeren bloedproeven voor een groep van 25 personen' is gelijk aan 6,554 5.
Dit resultaat verkrijg je door een eenvoudige redenering: $1 \cdot 0{,}99^{25} + 26 \cdot \left(1 - 0{,}99^{25}\right)$ = 6,554 5.
Voor een groep van 10 000 personen bespaart men dus 73,78 %.

1. Hoe groot is de besparing werkend met groepjes van 10?
2. Wat wordt dit als de kans op seropositief zijn bvb 0,95 is?

Deel 2

1. Toon aan: de besparing voor een groepje van *n* personen is gelijk aan $B(n) = -\frac{1}{n} + 0{,}99^n$.
   Hierbij veronderstellen we dat 'de kans op seropositief zijn' gelijk is aan 0,01.
2. Voor welke waarde van *n* is de besparing maximaal?
3. Verklaar: is de kans op seropositiviteit *p* %, dan is de besparing $B(n) = -\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$.
4. Per waarde van *p* is er een waarde van *n* waarvoor de besparing maximaal is. Onderzoek de evolutie van *n* naargelang *p* varieert.

Voorbeeld 3: Pythagoreïsche drietallen- eenheidscirkel - goniometrische t-formules

- *Pythagoreïsche drietallen*

3500 jaar geleden wisten de Babyloniërs reeds dat een driehoek met zijden 3, 4 en 5 een rechthoekige driehoek is. Ze kenden nog andere minder voor de hand liggende oplossingen van de vergelijking $x^2 + y^2 = z^2$, zoals bijvoorbeeld het drietal (6480,4961,8161). Omwille van de band met de stelling van Pythagoras worden deze drietallen **Pythagoreïsche drietallen** genoemd.

De leerlingen kunnen in een eerste fase informatie opsporen rond Pythagoreïsche drietallen. Naast de 'triviale' drietallen zoals (3,4,5), (5,12,13) bestaan er ook andere niet zo voor de hand liggende, zoals bijvoorbeeld (133,156,205).
Het hoofddoel van deze onderzoeksopdracht is op zoek te gaan naar het antwoord op de vraag: hoe kan je zelf 'minder evidente' Pythagoreïsche drietallen genereren?

- *Pythagoreïsche drietallen en de eenheidscirkel*

(133,156,205) voldoet aan het verband $133^2 + 156^2 = 205^2$ of nog: $\left(\frac{133}{205}\right)^2 + \left(\frac{156}{205}\right)^2 = 1$.

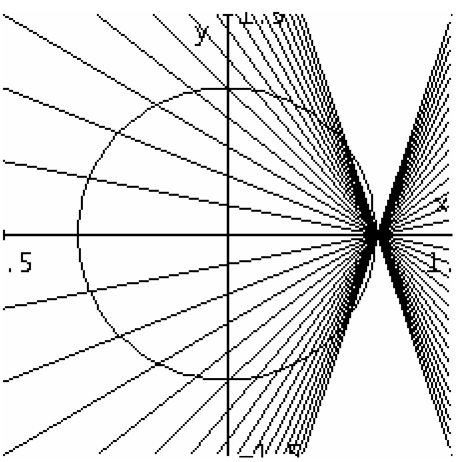
$P\left(\frac{133}{205}, \frac{156}{205}\right)$ is dus een punt van de eenheidscirkel.

Het vinden van de gehele oplossingen van $x^2 + y^2 = z^2$ is dus gelijkwaardig met het vinden van de punten met rationale coördinaten van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$. We zoeken een parametervoorstelling van deze cirkel waarbij x en y *rationale* functies in t zijn.

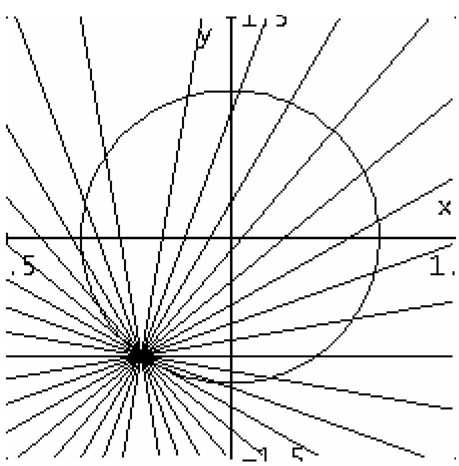
- *Rationale parametervergelijkingen voor de cirkel en Pythagoreïsche drietallen*

We beschouwen hiertoe een punt van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ als snijpunt van de cirkel met een variabele rechte l door een **vast punt** van de cirkel. De cirkel wordt dan met behulp van deze variabele rechte als het ware punt per punt 'gescand', weliswaar uitzondering gemaakt voor het vaste punt van waaruit 'gescand' wordt.

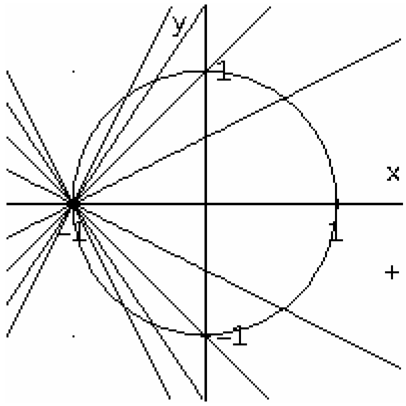
$(1,0)$ als vast punt



Willekeurig vast punt



Voor de uitwerking hierna kiezen we bijvoorbeeld $R(-1,0)$ als vast punt.



1. Toon aan dat de coördinaten van het snijpunt *P* van een willekeurige rechte door *R* met de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ voldoen aan het stelsel vergelijkingen $\begin{cases}(1+t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0 \\ y = t(x+1)\end{cases}$.

2. Toon aan dat een willekeurig punt *P* van de cirkel (met *P* verschillend van *R*) als coördinaten $\begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{2t}{1+t^2}\end{cases}$ heeft.

Door *t* alle reële waarden te laten doorlopen, vinden we alle punten van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$, behalve het punt *R*.

Als we *t* verder beperken tot de verzameling Q, dan zijn de coördinaten van *P* *rationaal*. Zo vinden we bijvoorbeeld met $t = \dfrac{7}{19}$ dat $P\left(\dfrac{156}{205}, \dfrac{133}{205}\right)$. Voor dit punt geldt dus dat

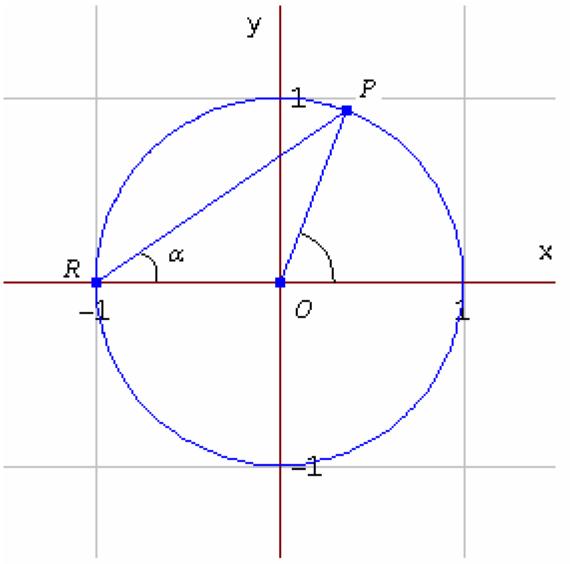
$$\left(\frac{156}{205}\right)^2 + \left(\frac{133}{205}\right)^2 = 1 \text{ of } 156^2 + 133^2 = 205^2.$$

Bijgevolg vormt $(133,156,205)$ een Pythagoreïsch drietal.

3. Creëer nu zelf een aantal Pythagoreïsche drietallen die onderling niet evenredig zijn. Hoeveel Pythagoreïsche drietallen bestaan er?

4. Verklaar:

   met behulp van nevenstaande figuur kunnen de resultaten uit 2. ook geschreven worden in de vorm
   $$\begin{cases} \cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \\ \sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \end{cases}$$



5. Maak o.a. gebruik van de **goniometrische** verdubbelingsformules om aan te tonen dat
   $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ en $\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$.

6. De formules $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$, $\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ en $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ worden de goniometrische *t*-formules genoemd: stellen we $t = \tan\alpha$, dan worden de goniometrische getallen $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$ en $\tan 2\alpha$ 'op rationale wijze' uitgedrukt in functie van *t*.

   We verkrijgen dus, met $t = \tan\alpha$, dat $\cos 2\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin 2\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2}$ en $\tan 2\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

   Maak gebruik van deze formules om:
   - de vergelijking $3\sin 2x + \cos 2x - 1 = 0$ op te lossen,
   - na te gaan onder welke voorwaarde(n) de vergelijking $a \cdot \sin 2x + b \cdot \cos 2x + c = 0$ oplossingen heeft,
   - de integraal $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin 2x}$ te berekenen

Voorbeeld 4: VWO-simulatie

Je neemt deel aan de eerste ronde van de VWO zonder enige wiskundige voorkennis.
Je beantwoordt dus elk van de 30 vragen (multiple choice – 5 antwoordmogelijkheden – 1 juist antwoord per vraag) op totaal willekeurige wijze.

1. Simuleer met je grafische rekenmachine zo'n deelname. Hoeveel juiste antwoorden heb je dan? Hoeveel juiste antwoorden zou je theoretisch mogen verwachten?
2. Simuleer dit experiment een 100 tal keer. Stel de resultaten grafisch voor en interpreteer deze resultaten.
3. Vergelijk de experimentele kansen met de theoretische kansen om 0,1,2, … 30 vragen juist te hebben.
4. Vergelijk dit ook eens als je de simulatie 500 keer laat uitvoeren.

Voorbeeld 5: Groeimodellen en integraalrekenen

1. Spoor info op in verband met exponentiële groei, begrensde groei en logistische groei. Een interessante link: http://nl.wikipedia.org/wiki/Pierre-Fran%C3%A7ois_Verhulst
2. Door welke differentiaalvergelijkingen worden deze groeimodellen beschreven?
3. Los deze differentiaalvergelijkingen op met behulp van integraalrekenen.

Voor deze opdracht brengt de leerkracht op voorhand het principe van het 'scheiden van de veranderlijken' heeft aan in de klas. Ook integratie van rationale functies waarbij de 'noemer van de tweede graad is met positieve discriminant' is behandeld (splitsen in partieelbreuken). Dit is uitbreidingsleerstof. Het **splitsen in partieelbreuken** zou echter ook als **voorbereidende onderzoeksopdracht** kunnen gegeven worden, mits voldoende gestaafd met uitgewerkte voorbeelden en/of deelopdrachten die leiden naar het eindresultaat.

Voorbeeld 6:

Vergelijkende studie van de ondersom, de middensom en de bovensom bij de parabool $y = x^2$, numeriek en algemeen over het interval $[0, b]$.

Voorkennis:

Weten dat $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$ en dus ook dat $\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{1}{6} (n-1) \cdot n \cdot (2n-1)$.

Meestal komen in de klas de ondersom en de bovensom aan bod.

Voor de ondersom geldt: $s_n = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = b^3 \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6n^3}$,

voor de bovensom geldt: $S_n = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 = b^3 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6n^3}$.

Opdracht:

1. De leerlingen stellen zelf de formule op voor de middensom, in analogie met de methode voor de onder- en de bovensom.
2. De leerlingen vergelijken de 'snelheid van convergentie' van de methode van de onder-, de boven- en de middensom.

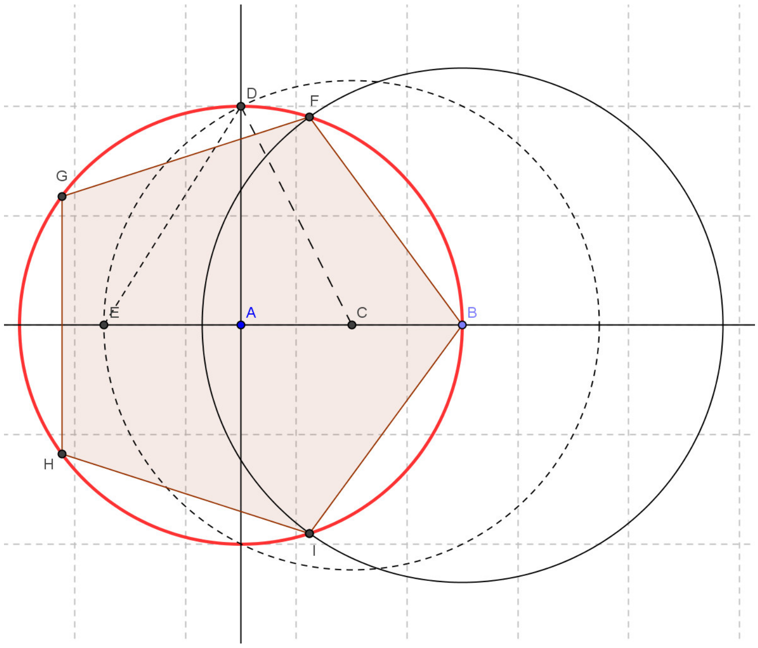
Voorbeeld 7: constructie van een regelmatige vijfhoek

De leerlingen sporen informatie op via het internet en tonen de correctheid van de constructie aan …

Bijvoorbeeld via:
http://www.cohe.be/fibonacci/fbnKun/fbn_kun_reg5hoek.htm
http://home.hccnet.nl/david.dirkse/vijfhoek/vijfhoek.html
http://nl.wikipedia.org/wiki/Constructie_met_passer_en_liniaal

Of via de eenheidscirkel:

C is midden van $[AB]$, E is zó dat $|CD| = |DE| = Z_5$.



Om aan te tonen dat deze constructie correct is dienen te leerlingen:

- te coördinatiseren,
- te bewijzen dat de afstand van $B(1,0)$ tot $F(\cos 72°, \sin 72°)$ gelijk is aan $|DE|$.

Het kernprobleem is dus een uitdrukking te vinden voor $\cos 72°$ en $\sin 72°$.

Hier kan gekozen worden voor de ‘omweg’ langs complexe getallen: $z = \cos 72° + i \cdot \sin 72°$ is één van de vijf verschillende oplossingen in goniometrische gedaante van $z^5 - 1 = 0$.
De oplossingen van $z^5 - 1 = 0$ kunnen echter ook algebraïsch voorgesteld worden via het oplossen van $(z-1)\cdot(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$ en dus is $z = \cos 72° + i \cdot \sin 72°$ één van de oplossingen van $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

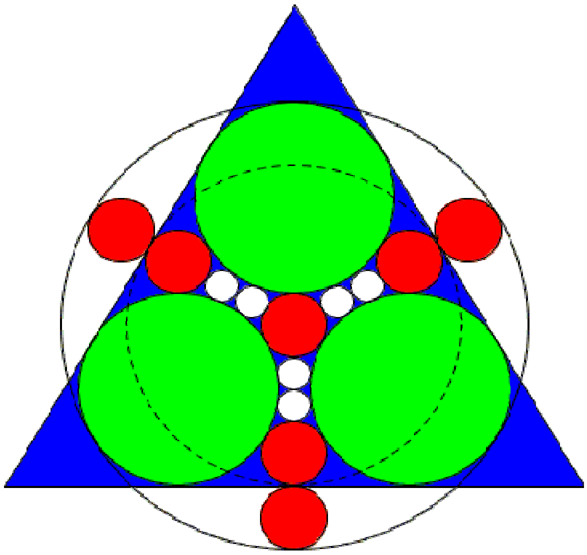
Leerlingen hebben in hun curriculum echter geen wederkerige vergelijkingen van de vierde graad leren oplossen. De leerkracht zal dus best op voorhand aan de leerlingen duidelijk (laten) maken hoe een vergelijking van de vorm $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ dient opgelost te worden. Dit zou echter ook als een voorbereidende onderzoekstaak kunnen gegeven worden, mits voldoende gestaafd met uitgewerkte voorbeelden en/of deelopdrachten die leiden naar het eindresultaat.

Voorbeeld 8: een jeugdige sangaku （算額）

Sangaku's zijn Japanse wiskundige puzzels, gemaakt op houten planken, die gedurende de 17e tot 19e eeuw werden aangebracht in Shinto-kapellen en soms in Boeddhistische tempels, als offer aan de goden of als uitdaging aan de leden van de congregatie (zie ook www.nl.wikipedia.org/wiki/Sangaku).

De nevenstaande sangaku werd in 1865 door de 15-jarige Tanabe Shigetoshi gemaakt en in de Meiseirinji-tempel opghangen.

(zie ook www.cut-the-knot.org/pythagoras/TeenSangaku.shtml).



In de blauwe gelijkzijdige driehoek zijn drie groene cirkels met straal *a* getekend, vier rode met straal *b* en zes witte met straal *c*. Alle cirkels raken elkaar en de zijden van de driehoek zoals in de figuur weergegeven.
De straal van de ingeschreven cirkel, getekend in stippellijn, is *r*.

Een **'open' opdracht** zou kunnen zijn: construeer (bvb met geogebra) deze puzzel.

Een **alternatief**, met enkele **'aanvullende tips'** voor de leerlingen kan zijn:
Ga op zoek naar verbanden tussen *a*, *b*, *c* en *r*.
Druk *a*, *b* en *c* uit in functie van *r* en construeer vervolgens deze puzzel.

Een **'meer gestructureerde' vraagstelling** zou kunnen zijn:

1. Op de figuur kan je rechtstreeks twee verbanden tussen *a*, *b*, *c* en *r* afleiden (ingeschreven cirkel, volle cirkel).
2. We hebben een derde verband nodig om *a*, *b* en *c* uit te drukken in functie van *r*.
   Noem *z* de zijde van de gegeven driehoek. Maak gebruik van meetkunde uit de tweede graad om aan te tonen dat $z = 2\sqrt{3} \cdot r$ en bijgevolg $h = 3r$.
   Toon vervolgens aan dat $3r = 3a + 4b + 4c$.
3. Los het verkregen (3,3) - stelsel op naar de onbekenden *a*, *b* en *c*.
4. Construeer met geogebra de 'jeugdige sangaku'.

Voorbeeld 9: Grafiek van de functie $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ met a,b en c reële getallen

Parabolen, ellipsen en hyperbolen zijn kegelsneden. Deze kegelsneden kunnen gebundeld worden in één poolvergelijking indien men werkt ten opzichte van een goed gekozen poolstelsel: $r=\dfrac{p}{1-e\cdot\cos\theta}$.

Werkt men echter met een orthonormaal cartesiaans assenstelsel dan zijn er drie 'formules' nodig om deze kegelsneden te vatten: $y^2=2px$ (parabool), $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (ellips) en $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (hyperbool). Toch kunnen deze drie kegelsneden, op een verschuiving na, 'gevat' worden via de kromme $k \leftrightarrow y^2=ax^2+bx+c$, afhankelijk van de keuze van *a*, *b* en *c*.

De kromme $k \leftrightarrow y^2=ax^2+bx+c$ kan opgevat worden als $y=\pm\sqrt{ax^2+bx+c}$.
De grafiek van de kromme $k \leftrightarrow y^2=ax^2+bx+c$ is dus de unie van de grafieken van twee functies: $f_1(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$,de bovenste helft van k en $f_2(x)=-\sqrt{ax^2+bx+c}$, de onderste helft van *k*.

In de onderzoeksopdracht die hierna volgt gaan we na wat de grafiek van de irrationale functie $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$, met a,b en $c \in \mathbb{R}$, zoal kan zijn. Hiervoor gebruiken we de 'omweg' van de kromme $k \leftrightarrow y^2=ax^2+bx+c$'.

Onderzoeksopdracht in twee delen

In een ***eerste instantie*** is het de bedoeling om een ***grafisch verband*** te leggen tussen:

- de grafieken van de parabool $y=x^2$ en de kromme $y^2=kx$,
- de cirkel $x^2+y^2=1$ en de ellips $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,
- de grafiek van de homografische functie $y=\dfrac{1}{x}$ en de hyperbool $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, respectievelijk $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$.

  Met ***grafisch verband*** bedoelen we: verticale/horizontale uitrekking, verschuiving, spiegeling, rotatie, homothetie …
  Voor dit deel worden een twee à drietal lestijden voorzien.

  Dit onderzoeksdeel omvat de opdrachten 1 tot en met 4.

In een ***tweede instantie*** is het de bedoeling om het verband te leggen tussen de grafiek van $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$, met a,b en c reële getallen, en de ‘standaardkegelsneden’ door de grafiek van $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ te beschouwen als de bovenste helft van de kromme $k \leftrightarrow y^2=ax^2+bx+c$.

Voor dit onderdeel worden een tweetal lestijden voorzien.

Een extra lestijd kan eventueel gebruikt worden om de verslaggeving op punt te stellen.

Opdracht 1

1. Welke grafisch verband bestaat er tussen de parabool $y = x^2$ en de kromme $y^2 = x$?
2. Welk grafisch verband bestaat er tussen de kromme $y^2 = x$ en de kromme $y^2 = kx$ $(k \neq 0)$? Maak een onderscheid tussen $k > 0$ en $k < 0$.

Opdracht 2

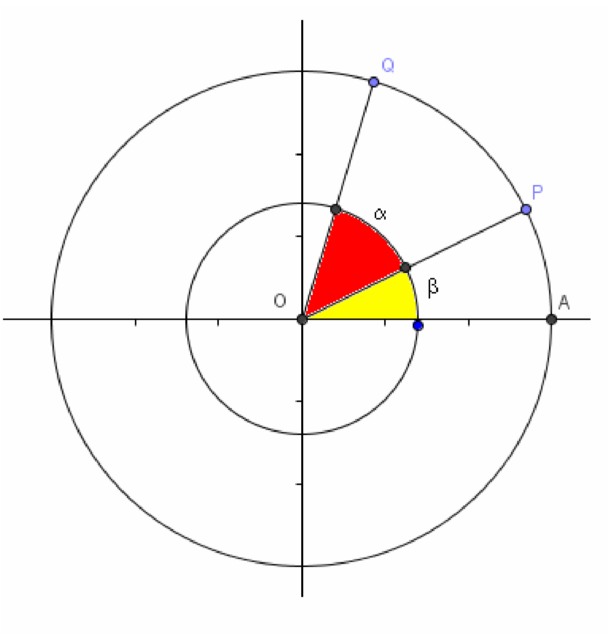
Welke grafisch verband bestaat er tussen de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ en de kromme $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$?

Opdracht 3

1. Beschouw een punt $P(x, y)$ in het vlak zodat $|OP| = r$.

   Door een rotatie met centrum O en rotatiehoek α komt het punt $P(x, y)$ terecht op de plaats $Q(x', y')$. Toon aan dat $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

   Hieronder een figuur ter ondersteuning. Denk ook aan de parametervoorstelling van de cirkel met als vergelijking $x^2 + y^2 = r^2$, dus $P(\ \ldots, \ldots)$ en $Q(\ldots, \ldots)$.



2. Stel dat $P(x, y)$ een punt is van de kromme $x^2 - y^2 = 1$ en $\alpha = 45°$.

   Toon aan dat $Q(x', y')$ op de kromme $x' \cdot y' = \dfrac{1}{2}$ ligt.

   Door een rotatie met centrum O over $45°$ zal de kromme $x^2 - y^2 = 1$ dus getransformeerd worden tot de kromme $x \cdot y = \dfrac{1}{2}$.

Opdracht 4

1. Welke transformaties (uitrekking, spiegeling, rotatie) zijn er nodig om de grafiek van $y=\frac{1}{x}$ om te vormen tot de kromme $x^2-y^2=1$?
2. De grafiek van $y=\frac{1}{x}$ heeft de *x*-as als verticale asymptoot en de *y*-as als horizontale asymptoot. Welke rechten zijn dan asymptoten van de kromme $x^2-y^2=1$?

   Net zoals $y=\frac{1}{x}$ noemen we de grafiek van de kromme $x^2-y^2=1$ een **orthogonale hyperbool**. Dit zijn hyperbolen waarvan de asymptoten loodrecht op elkaar staan.

3. Welk grafisch verband bestaat er tussen de hyperbool $x^2-y^2=1$ en de kromme $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$? Welke rechten zijn asymptoten van deze kromme?

   We noemen de grafiek van de kromme $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ een **hyperbool**.

4. Toon aan: door een rotatie over 90° zal de orthogonale hyperbool $x^2-y^2=1$ getransformeerd worden tot de kromme $x^2-y^2=-1$ met dezelfde asymptoten als $x^2-y^2=1$.
   Ook de kromme $x^2-y^2=-1$ wordt een **orthogonale hyperbool** genoemd.

5. Welk grafisch verband bestaat er tussen de hyperbool $x^2-y^2=-1$ en de kromme $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$? Welke rechten zijn asymptoten van deze kromme?

   Ook de grafiek van de kromme $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ wordt een **hyperbool** genoemd.

Opdracht 5: open opdracht

Onderzoek (met **cijfervoorbeelden**) de grafiek van de functie $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ met a,b en c reële getallen. Om dit onderzoek te starten stel je het best eerst een grofstructuur op in verband met de mogelijke gevallen die zich kunnen voordoen bij de reële getallen *a*,*b* en *c*. Maak daarna bij dit onderzoek gebruik van de resultaten uit voorgaande opdrachten.

Om dit onderzoek te helpen ondersteunen geven we een voorbeeld van een mogelijke beknopte uitwerking van één gevalstudie: $b = 0,\ a$ en $c \neq 0$.

$f(x) = \sqrt{ax^2 + c}$ $\rightarrow$ een **halve cirkel, ellips, hyperbool** of **niets.**

Verklaring: de grafiek van $f(x) = \sqrt{ax^2 + c}$ vormt een deel van de kromme $y^2 = ax^2 + c$.
Hier kan dan verder opgesplitst worden in de gevallen
$a > 0, c > 0$; $a > 0, c < 0$, $a < 0, c > 0$ en $a < 0, c < 0$.
Ook het bijzonder geval $a = -1$ dient onderzocht te worden (cirkelaspect).

Zo bijvoorbeeld stelt $y^2 = -x^2 + 4$ een cirkel (te herleiden tot $x^2 + y^2 = 4$),
$y^2 = -2x^2 + 4$ een ellips (wegens $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$),
$y^2 = 2x^2 - 4$ een hyperbool (wegens $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$),
$y^2 = 4x^2 + 2$ een hyperbool (wegens $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 1$)
en $y^2 = -2x^2 - 4$ 'niets' voor.

Extra info

Deze onderzoeksopdracht kan zowel in het 5de jaar als in het 6de jaar gegeven worden.
Leerlingen hoeven geen kennis vooraf te hebben over kegelsneden.

Wenst men met de leerlingen eerder een minder omvangrijk onderzoek uit te voeren, kan men zich beperken tot het eerste deel (de opdrachten 1 tot en met 4) van het onderzoek.
Dit kan gerust gedurende 3 lestijden.
De titel van het onderzoek kan dan bijvoorbeeld 'Kegelsneden' zijn en leerlingen kunnen via het internet extra informatie opsporen rond de drie 'standaardkegelsneden'.

De volledige onderzoeksopdracht wordt uitgevoerd in een lokaal met 12 pc's die verbonden zijn met het internet. De 21 leerlingen zijn verdeeld in 7 groepjes van 3.
De leerlingen maken gebruik van het programma 'geogebra'
In elk groepje wordt een verslaggever aangeduid.
Het verslag wordt getypt via de word-vergelijkingseditor en figuren uit geogebra worden ingevoerd in de tekst om het onderzoek te illustreren.

De leerlingen mochten, indien de nodige informatie niet via het internet te verkrijgen was, één groepslid naar de schoolbibliotheek sturen om informatie op te sporen uit de daar aanwezige handboeken wiskunde van de 1ste tot en met de 3de graad.

Bij opdracht 2 heeft de leraar-coach extra informatie gegeven in verband met 'homothetie', zodat daarna ook de opdracht 4.3 en 4.5 zonder problemen konden opgelost worden.
De info die aan de leerlingen hierover gegeven werd vind je terug aan het einde van dit schrijven
.

Opdracht 3.2 bleek voor de leerlingen niet zo gemakkelijk te zijn om zelfstandig op te lossen. Uiteindelijk volstond de tip om $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ uit te drukken in functie van $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$.

Bij opdracht 5 werd één gevalstudie vooraf klassikaal besproken zodat de leerlingen toch een beetje in de goede richting geduwd werden. De leerlingen maakten spontaan gebruik van drie schuifknoppen in geogebra om grafieken te genereren van de kromme $k \leftrightarrow y^2 = ax^2 + bx + c$.

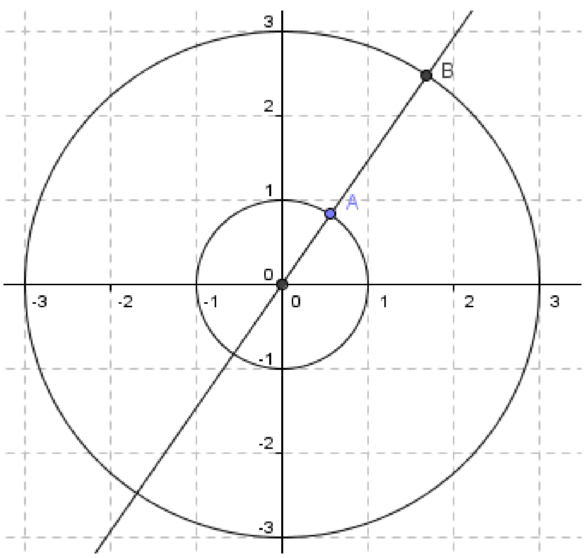
En tot slot: de leerlingen hebben gedurende een 5-tal lestijden heel intensief , enthousiast en flink naar behoren 'gewerkt' met 'wiskunde'.

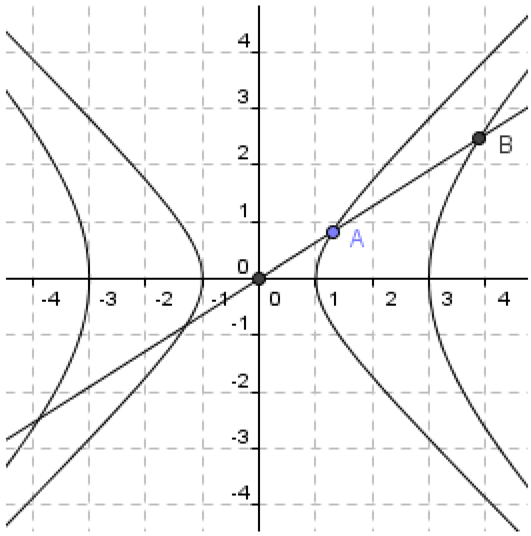
Opmerking in verband met opdracht 2 en opdracht 4.3

Van $x^2 + y^2 = 1$ naar $x'^2 + y'^2 = 9 : x'^2 + y'^2 = 9 \Leftrightarrow \left(\frac{x'}{3}\right)^2 + \left(\frac{y'}{3}\right)^2 = 1$.

Het verband tussen (x, y) en (x', y') is dus $\begin{cases} x = \frac{x'}{3} \\ y = \frac{y'}{3} \end{cases}$ of nog $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \end{cases}$.

We zeggen dat de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ door een homothetie met centrum de oorsprong en factor 3 wordt afgebeeld op de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 9$.
Een analoge redenering geldt voor de overgang van de hyperbool $x^2 - y^2 = 1$ naar de hyperbool $x^2 - y^2 = 9$.
In beide onderstaande figuren geldt dat $|OB| = 3|OA|$.



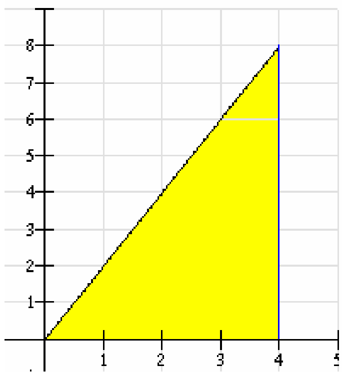


Voorbeeld 10: omwentelingslichamen

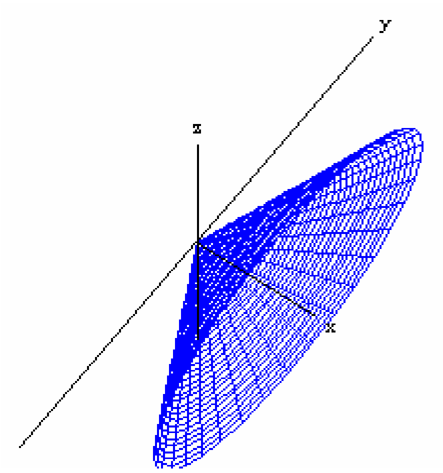
1. Werkend met een functievoorschrift

Laat men het gebied begrensd door de grafiek van een continue functie $y = f(x)$ over $[a,b]$ wentelen om de x-as, dan verkrijgt men een omwentelingslichaam.
Bij het wentelen om de x-as beschrijft een punt $P(x, y)$, dat ligt op de grafiek van $y = f(x)$, een cirkelbeweging waarvan het vlak van de beweging een vlak is dat evenwijdig is met het yz-vlak. Een stelsel parametervergelijkingen van het verkregen omwentelingslichaam is van de vorm $\begin{cases} x = t \\ y = |f(t)|\cos\alpha \\ z = |f(t)|\sin\alpha \end{cases}$ met $t \in [a,b]$ en $\alpha \in [0,2\pi]$.

Nemen we bijvoorbeeld een kegel die we verkrijgen door het ingekleurde gebied hiernaast te wentelen om de x-as.
Een stelsel parametervergelijkingen is:
$\begin{cases} x = t \\ y = |2t|\cos\alpha \\ z = |2t|\sin\alpha \end{cases}$ met $t \in [0,4]$ en $\alpha \in [0,2\pi]$.
De cartesiaanse vergelijking van deze kegel is $y^2 + z^2 = 4x^2$ (eliminatie van parameter t).



De kegel kunnen we dan als volgt voorstellen:



1. Het gebied begrensd door $y = 2x$ en de y-as (voor $x \in [0,4]$) wentelt om de y-as.
   Bepaal een stelsel parametervergelijkingen én de cartesiaanse vergelijking van de verkregen kegel.
2. Het gebied begrensd door $y = 2x + 3$ en de x-as (voor $x \in [0,4]$) wentelt om de x-as.
   Bepaal een stelsel parametervergelijkingen én de cartesiaanse vergelijking van de verkregen afgeknotte kegel.
3. Stel de figuur voor met behulp van winplot.

2. Werkend met een stelsel parametervergelijkingen van een vlakke kromme

We kunnen ook gebruik maken van een stelsel parametervergelijkingen van een gegeven vlakke kromme (in plaats van een gegeven functievoorschrift).

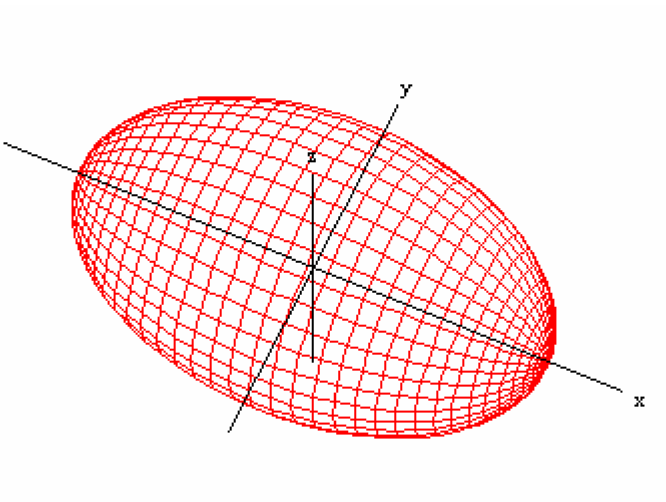
Bijvoorbeeld om een ellipsoïde voor te stellen kunnen we als volgt te werk gaan.

Beschouw de ellips $\mathcal{E}$ met halve grote as 5 en halve kleine as 3.

Een stelsel parametervergelijkingen van deze ellips is $\begin{cases} x = 5\cos\alpha \\ y = 3\sin\alpha \end{cases}$ met $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Een stelsel parametervergelijkingen van de gevraagde ellipsoïde is dan $\begin{cases} x = 5\cos\alpha \\ y = |3\sin\alpha| . \cos\beta \\ z = |3\sin\alpha| . \sin\beta \end{cases}$.

Hierbij zijn $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$.
De cartesiaanse vergelijking verkrijgen we als volgt: $y^2 + z^2 = 9\sin^2\alpha$, samen met $x^2 = 25\cos^2\alpha$ levert dit dan $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2 + z^2}{9} = 1$ of nog $9x^2 + 25y^2 + 25z^2 - 225 = 0$.
De gevraagde ellipsoïde stellen we dan als volgt voor:



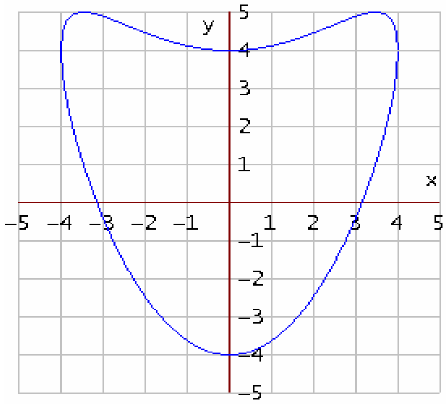
Bepaal een stelsel parametervergelijkingen én de cartesiaanse vergelijking van

1. Een bol met middelpunt de oorsprong en 4 als straal.
2. Een eenbladige, respectievelijk een tweebladige omwentelingshyperboloïde, vertrekkend van een parametervoorstelling van de hyperbool $x^2 - y^2 = 1$.
3. Een torus, vertrekkend van een parametervoorstelling van een cirkel met middelpunt $M(0,3)$ en straal $r = 1$ ..

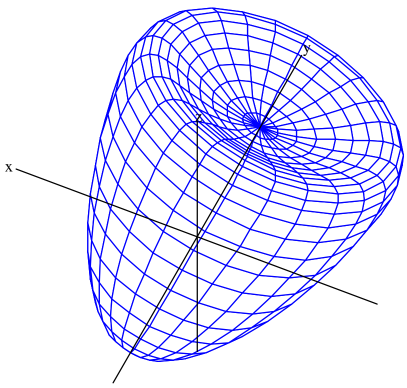
en stel de figuren voor met behulp van winplot.

3. Een hart voor …

Gegeven is het gebied G begrensd door de krommen $y=\frac{1}{4}x^2+\sqrt{16-x^2}$ en $y=\frac{1}{4}x^2-\sqrt{16-x^2}$.
L is het ruimtelichaam dat je verkrijgt door G te laten wentelen om de y-as.



1. Bepaal exact de oppervlakte van het gebied G
2. Bepaal een stelsel parametervergelijkingen van de figuur bepaald door bovenstaande krommen. In deze parametervoorstellingen dienen cos t en sin t op te treden.
3. Creëer met behulp van winplot het lichaam L.



Voorbeeld 11: analytische meetkunde, goniometrie en differentiaalvergelijkingen

1. Construeer (bvb met geogebra) een cirkel c met middelpunt op de y-as (en verschillend van de oorsprong) die raakt aan de x-as. Beschouw een willekeurig punt P op deze cirkel en noem t de raaklijn in P aan c. Welk verband vermoed je tussen de hoek die t maakt met de positieve x-as en de hoek die de rechte OP maakt met de positieve x-as?

2. Bewijs dit vermoeden.

3. Een punt P beweegt in het vlak langs een kromme met als eigenschap dat de hoek tussen de raaklijn en de positieve x-as altijd gelijk is aan het dubbel van de hoek die de rechte OP maakt met de positieve x-as. Ga op zoek naar alle krommen die hieraan voldoen.

Uitbreiding van het onderzoek:

4. Een punt P beweegt in het vlak langs een kromme met als eigenschap dat de hoek tussen de raaklijn en de positieve x-as steeds gelijk is aan het drievoud van de hoek die de rechte OP maakt met de positieve x-as. Ga op zoek naar alle krommen die hieraan voldoen.

5. Op één van de bissectrices van een orthonormaal xy-assenstelsel liggen twee vaste punten A en B symmetrisch om de oorsprong zodat $|AB| = 2k$. Bepaal de meetkundige plaats van alle punten P waarvoor geldt dat $|PA| \cdot |PB| = k^2$.
   Welk verband is er met jouw oplossing uit 4.?

6. Zoek op het internet informatie rond 'het lemniscaat van Bernouilli'. Hoe zou je het resultaat uit 5. kunnen omvormen tot de info die je gevonden hebt?

Je krijgt er maar niet genoeg van? Ga dan de volgende uitdaging aan …

7. Een punt P beweegt in het vlak langs een kromme met als eigenschap dat de hoek tussen de raaklijn en de positieve x-as steeds gelijk is aan het viervoud van de hoek die de rechte OP maakt met de positieve x-as. Ga op zoek naar alle krommen die hieraan voldoen.

Mogelijke tips/tussenoplossingen voor dit onderzoek!

Bij 2: Is α de hoek tussen *t* en *x* en θ de hoek tussen *OP* en *x*, dan volstaat het aan te tonen dat $\tan\alpha = \tan 2\theta$. Hierbij is rico *t* = $\tan\alpha$ en $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

Bij 3: Je vindt relatief vlug dat $\frac{dy}{dx} = \frac{2\cdot\frac{y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}}$.

Deze differentiaalvergelijking kan je oplossen met de substitutie $u = \frac{y}{x}$. Dit leidt tot $\int \frac{1-u^2}{u+u^3}\cdot du = \int \frac{dx}{x}$. Leerlingen dienen dus enige notie te hebben van het scheiden van de variabelen en het splitsen in partieelbreuken (hier relatief eenvoudig) .
Uiteindelijk resulteert dit in $xy = kx\left(x^2+y^2\right)$ wat beter genoteerd wordt als $x=0$ of $x^2+y^2=2my$ of nog $x=0$ of $x^2+\left(y-m\right)^2=m^2$.

Bij 4: Leerlingen dienen in te zien dat $\tan 3\theta$ in functie van $\tan\theta$ wordt uitgedrukt $\Rightarrow \frac{dy}{dx}$ in functie van $\frac{y}{x}$. Hiertoe is eerst nodig om met behulp van de goniometrische som- en verschilformules aan te tonen dat $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ en $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.
Hieruit volgt dan (met de nodige 'kunstgrepen') dat $\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{4-3\tan^2\theta}$.

De gevonden differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = \frac{3\cdot\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^3}{1-3\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ lost men terug via $u = \frac{y}{x}$.

Dit leidt tot $\int \frac{1-3u^2}{u+u^3}\cdot du = 2\int \frac{dx}{x}$ met als resultaat $\left(x^2+y^2\right)^2 = axy$.

Bij 5: het uitwerken van de voorwaarde $|PA|\cdot|PB| = k^2$ kan via een CAS-programma
Het is dan beter de voorwaarde om te vormen tot $|PA|^2\cdot|PB|^2 = k^4$.

$$\left(\left(x-\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2\right)\cdot\left(\left(x+\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(y+\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = k^4$$

$$x^4 + 2\cdot x^2\cdot y^2 - 4\cdot k^2\cdot x\cdot y + y^4 = 0$$

$$(x^2+y^2)^2 = 4\cdot k^2\cdot x\cdot y$$

Bij 6: zie http://nl.wikipedia.org/wiki/Lemniscaat_van_Bernoulli

Dit resultaat verkrijg je door de oplossing uit 5. te roteren over - 45°. Indien de leerlingen rotatieformules hebben gezien, kunnen ze dit eventueel ook bewijzen.

Bij 7: hier is een CAS-programma 'levensnoodzakelijk' …

Voorbeeld 12: combinatoriek en driehoek van Pascal (met dank aan Claudine Callens)

- Aanleiding tot deze opdracht was een artikel in het tijdschrift *Uitwiskeling* van de winter 2006 over de driehoek van Pascal. Dit tijdschrift is beschikbaar in onze schoolbibliotheek en ook op het internet *http://www.uitwiskeling.be*.
  Nieuw in deze opdracht t.o.v. het Uitwiskeling-artikel is het ontdekken en bestuderen van de Delannoy getallen.
  De opdracht is verdeeld in een aantal deelopdrachten die samen een mooi geheel vormen.
  Hier volgt de taakverdeling :

Iedereen	*Groep 1* Anne, Annelies en Delphine	*Groep 2* Julie, Joke, Ilse en Valerie	*Groep 3* Karen, Lieselotte en Jasmijn
Opdrachten 1 en 2	Opdrachten 3 en 9	Opdrachten 4, 6 en 8	Opdrachten 5, 7 en 8

  Nadien moeten alle oplossingen aan elkaar uitgewisseld en uitgelegd worden zodat elk van jullie het geheel beheerst.

- Vermeld in een lognota wanneer aan deze opdracht gewerkt werd en hoe lang je telkens werkte. Hierbij kunnen ook eventuele moeilijkheden en een eigen reflectie op je werk genoteerd worden. Houd je persoonlijk kladwerk bij en geef dit af samen met de oplossing van je opdrachten. Dit kladwerk weerspiegelt je werkproces en is nuttig voor jezelf omdat het toont hoe de opdracht vlotte.

- Je wordt gequoteerd op :
  - de inhoud van je werk (dezelfde quotering voor de hele groep) (15p)
  - je persoonlijke inzet, inbreng en betrokkenheid (individueel gequoteerd) (5p)
  - de uitleg van de oplossingen van jouw deelopdrachten aan iemand van een andere groep (individueel gequoteerd) (5p).

Veel werkplezier !

Inleiding

Henri-Auguste Delannoy (1833-1915) was een Franse wiskundige uit de streek van Bordeaux die diverse kans- en andere spelen wiskundig bestudeerde.
Zijn naam is in de hedendaagse wiskunde verbonden aan de “Delannoy getallen”.

In deze onderzoeksopdracht zullen we vertrekken van een combinatorische probleemstelling, die bij oplossing precies aanbelandt bij deze getallen.

Tevens zullen we een verband ontdekken tussen de Delannoy getallen en de binomiaalcoëfficienten uit de driehoek van Pascal.

Definitie van de Delannoy getallen

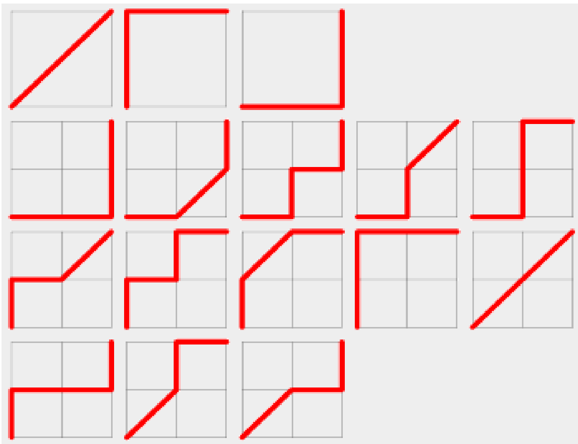
We beschouwen in het xy-vlak het punt P met coördinaten (m,n) zodat $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{(0,0)\}$.

Het aantal verschillende manieren waarop men vanuit de oorsprong $O(0,0)$ het punt P kan bereiken als men zich enkel mag verplaatsen volgens de vectoren $\vec{u}(1,0)$, $\vec{v}(0,1)$ en $\vec{w}(1,1)$ noemt men het Delannoy getal $d(m,n)$.

Bij definitie stellen we $d(0,0) = 1$.

Voorbeeld

Als $m = 2$ en $n = 2$, dan vinden we door de verschillende mogelijkheden te tekenen en te tellen dat er 13 verschillende manieren zijn om op “reglementaire” wijze van O naar $P(2,2)$ te gaan. Dus $d(2,2) = 13$.



Opdracht 1 (opwarmertje)

Bepaal $d(1,1)$ en teken dit.
Bepaal $d(m,0)$ voor elke $m \in \mathbb{N}_0$ en verklaar dit.
Bepaal $d(0,n)$ voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ en verklaar dit.

Opdracht 2

Vind en bewijs een recursieverband tussen de Delannoy getallen.

Gebruik dit verband om de Delannoy getallen $d(m,n)$ te vinden voor alle $(m,n) \in \{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3\}$.

Geef deze getallen in een matrixvorm. Vertrek hiervoor van de gevonden oplossing van opgave 1.

<u>Opdracht 3</u>

Vind door combinatorisch te redeneren een expliciet voorschrift voor het Delannoy getal $d(m,n)$ met $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

<u>Opdracht 4</u>

In opdracht 3 vond men het volgende expliciete voorschrift voor de Delannoy getallen :

$$d(m,n) = \sum_{j=0}^{\min(m,n)} \frac{(m+n-j)!}{(m-j)!\,(n-j)!\,j!} \quad \text{met} \quad (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Er bestaat een verband tussen de Delannoy getallen en de binomiaalgetallen !
Bewijs dat :

$$d(m,n) = \sum_{j=0}^{\min(m,n)} \binom{n}{j}\binom{m+n-j}{n} \quad \text{met} \quad (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}. \qquad (1)$$

<u>Opdracht 5</u>

In de vakliteratuur noemt men de Delannoy getallen $d(n,n)$ de <u>centrale</u> Delannoy getallen.

Meetkundig geïnterpreteerd geven zij het aantal reglementaire paden binnen een <u>vierkant</u> rooster met zijde n.

De centrale Delannoy getallen bevinden zich op de hoofddiagonaal van de matrix uit opdracht 2.

a) Bewijs vertrekkend van de uitdrukking (1) uit opdracht 4 de volgende identiteit (wordt zeer frequent geciteerd in wiskundige artikels over combinatoriek) :

$$d(n,n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n+j}{j} \quad \text{met} \quad n \in \mathbb{N}.$$

b) Toon vervolgens aan dat ook geldt :

$$d(n,n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n+j}{n} \quad \text{met} \quad n \in \mathbb{N}.$$

<u>Opdracht 6</u>

Deze opdracht bouwt verder op het resultaat uit opdracht 5 a).

Toon hoe het voorschrift $d(n,n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n+j}{j}$ $n \in \mathbb{N}$ gevisualiseerd kan worden in de driehoek van Pascal.

Opdracht 7

Deze opdracht bouwt verder op het resultaat uit opdracht 5 b).

Toon hoe het voorschrift $d(n,n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n+j}{n}$ met $n \in \mathbb{N}$ gevisualiseerd kan worden in de driehoek van Pascal.

Een woordje over de genererende functie G(x) van d(n,n)

Beschouw de oneindige reeks

$$d(0,0) + d(1,1)x + d(2,2)x^2 + d(3,3)x^3 + \cdots \; = \; \sum_{j=0}^{+\infty} d(j,j)x^j \; .$$

Via hogere wiskunde kan men bewijzen dat deze reeks voor elke x in een voldoende kleine omgeving van 0 convergeert, en dat geldt :

$$d(0,0) + d(1,1)x + d(2,2)x^2 + d(3,3)x^3 + \cdots = G(x) = \frac{1}{\sqrt{1-6x+x^2}} \, .$$

De functie $G(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-6x+x^2}}$ wordt de genererende functie genoemd voor de centrale Delannoy getallen omdat elk van deze getallen als volgt via $G(x)$ kan berekend worden :

$$d(n,n) = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^nG}{dx^n}\right]_{x=0} \, .$$

Opdracht 8

Toon door rechtstreekse berekening aan dat voor $G(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-6x+x^2}}$ geldt :

- $d(0,0) = [G(x)]_{x=0}$
- $d(1,1) = \dfrac{1}{1!}\left[\dfrac{dG}{dx}\right]_{x=0}$
- $d(2,2) = \dfrac{1}{2!}\left[\dfrac{d^2G}{dx^2}\right]_{x=0}$

Een woordje over de genererende functie H(x,y) van d(m,n)

Beschouw de oneindige reeks

$$d(0,0) + d(1,0)x + d(0,1)y + d(2,0)x^2 + d(1,1)xy + d(0,2)y^2 + \cdots \; = \; \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} d(m,n)x^m y^n \; .$$

Via hogere wiskunde kan men bewijzen dat deze reeks voor elke (x,y) in een voldoende kleine omgeving van $(0,0)$ convergeert, en dat geldt :

$$d(0,0) + d(1,0)x + d(0,1)y + d(2,0)x^2 + d(1,1)xy + d(0,2)y^2 + \cdots = H(x,y) = \frac{1}{1-x-y-xy} \, .$$

De functie $H(x,y)=\dfrac{1}{1-x-y-xy}$ wordt de genererende functie genoemd voor de Delannoy getallen omdat elk van deze getallen als volgt via $H(x,y)$ kan berekend worden:

$$d(m,n)=\frac{1}{m!\,n!}\left[\frac{\partial^{m+n}H(x,y)}{\partial^m x\ \partial^n y}\right]_{(x,y)=(0,0)}.$$

<u>Opdracht 9</u>

Toon door rechtstreekse berekening aan dat voor $H(x,y)=\dfrac{1}{1-x-y-xy}$ geldt :

- $d(0,0)=\left[H(x,y)\right]_{(x,y)=(0,0)}$
- $d(1,0)=\dfrac{1}{1!\,0!}\left[\dfrac{\partial H(x,y)}{\partial x}\right]_{(x,y)=(0,0)}$
- $d(1,1)=\dfrac{1}{1!\,1!}\left[\dfrac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x\ \partial y}\right]_{(x,y)=(0,0)}$

<u>Bronnen</u>

http://mathworld.wolfram.com/DelannoyNumber.html

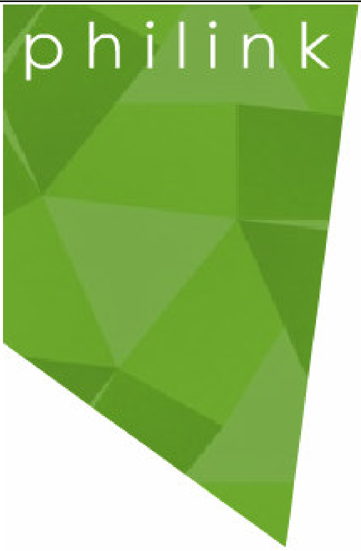
http://binomial.csuhayward.edu/IdentitiesDelannoy.htm

"Over de Pascal-bloemetjes en de Fibonacci-bijtjes."
(Pedro Tytgat – Uitwiskeling jaargang 23 nummer 1)

<u>Ideeën voor bijkomende opgaven</u>

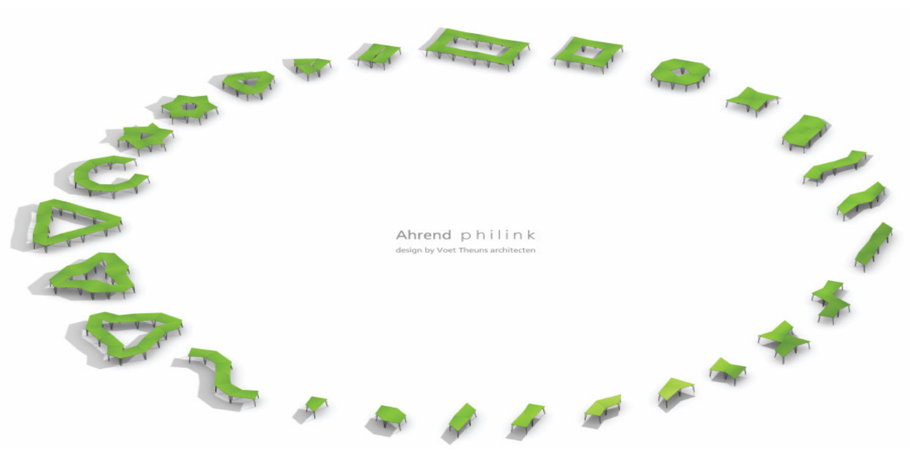
- Bewijzen dat uit de expiciete vorm van $d(m,n)$ de recursiebetrekking volgt.
  (is een controle op de gevonden expliciete uitdrukking).
- Uit de recursiebetrekking trachten de expliciete vorm af te leiden (volledige inductie ?)

Voorbeeld 13: Philinkgeometrie (met dank aan Jef De Langhe)



Tijdens de Dagen van de Wiskunde in Kortrijk kreeg ik van de inrichters een pakketje met daarin vier puzzelstukjes, die als opschrift "Ahrend philink" droegen. De stukjes bleken modellen te zijn van de philinktafels, ontworpen door twee Antwerpse architecten, Caroline Voet en Jeroen Theuns en voor het eerst voorgesteld op Interieur 08 te Kortrijk op 17 oktober 2008.
De merknaam philink is een samentrekking van "phi", wat verwijst naar de gulden verhouding en "link", dat wijst op "schakelen".
De philinktafels zijn gebaseerd op zuiver wiskundige verhoudingen. Ze hebben een zeer eenvoudig recept, nl. drie zijden van gelijke lengte, gecombineerd met een hoek van 90°. De vierde zijde heeft een lengte die gebaseerd is op de gulden snede. Ze heeft t.o.v. de drie gelijke zijden de gulden verhouding, dus 1,618.../1 of 1/1,618...

De tafels zijn gemakkelijk te schakelen. Hiernaast zie je enkele voorbeelden van dergelijke "links".



Over philinktafels kan een interessante onderzoeksopdracht gegeven worden in het begin van de 3^{de} graad. Dit kan echter ook al in het 2de leerjaar van de 2de graad! We geven hier de vier fasen aan, waaruit dit onderzoek zou kunnen bestaan.

1 In de eerste plaats moeten de leerlingen inzicht krijgen in de gulden snede en de gulden verhouding. Daarbij zoeken ze antwoorden op vragen als:

- Wat betekent het om een lijnstuk $[AB]$ te verdelen door er een gulden snede op aan te brengen?
- Wat is de betekenis van de gulden verhouding φ? Wat is de betekenis van $\frac{1}{\varphi}$?
- Hoe vinden we een exacte uitdrukking voor φ en voor $\frac{1}{\varphi}$?
- Hoe kunnen we op een lijnstuk een gulden snede aanbrengen met passer en liniaal?
- Wat verstaan we onder de "gulden rechthoek"? Hoe kunnen we een gulden rechthoek construeren?
- Waar vinden we de gulden verhouding terug in de natuur en in de kunst?

2 Eens de leerlingen het concept van philink volledig begrepen hebben, kunnen ze op zoek gaan naar alle vierhoekige tafelbladen, die aan dit recept beantwoorden. In hun website www.philink.be zeggen de ontwerpers zelf dat er acht mogelijkheden zijn, waarvan er momenteel slechts één in de praktijk is gebracht. De leerlingen kunnen nu met behulp van Geogebra of Cabri op zoek gaan naar deze acht mogelijkheden. Daarbij komen heel wat vragen aan de orde zoals:

- Hoeveel mogelijkheden zijn er om de rechte hoek te leggen?
- Hoeveel mogelijkheden zijn er als we de mogelijkheden voor de rechte hoek combineren met de mogelijkheden voor de lengte van de vierde zijde?
- Waarom kunnen twee congruente vierhoeken toch verschillende tafelbladen opleveren?

Bij de laatste vraag is het ook interessant om aan de leerlingen duidelijk te maken dat congruente figuren fysisch op elkaar kunnen geplaatst worden door een verplaatsing of door een omkering. Bij een verplaatsing gaat men niet buiten het vlak, bij een omkering wel. Wiskundig gezien is een verplaatsing ofwel een verschuiving, ofwel een draaiing. Een omkering is een spiegeling of een samenstelling van een spiegeling met een verschuiving, een zogenaamde "schuifspiegeling".

3 Als de leerlingen de hoeken van de vierhoeken aanduiden, dan ontdekken ze een merkwaardig resultaat:
de hoek tegenover de rechte hoek is resp. gelijk aan 60°, 120°, 144° en 72°.
De vraag is nu natuurlijk waarom dit zo is. Voor de hoeken van 60° en 120° kan de redenering volledig door de leerlingen gevonden worden. Voor de hoeken van 144° en 72° wordt het wat ingewikkelder.

4 Beperken we ons nu opnieuw tot de vierhoek (1), die in de philinktafels wordt toegepast. Uit het feit dat de hoek tegenover de rechte hoek gelijk is aan 60° volgt dat de tafels zeer gemakkelijk te schakelen zijn. 60° gaat immers een geheel aantal keer in 180° en 360°. Een laatste opdracht kan nu zijn om de leerlingen een aantal van deze schakelingen te laten ontwerpen. Daartoe kunnen ze vierhoeken uitsnijden en hun creativiteit laten werken. De ontwerpopdrachten kunnen ook praktisch verwoord zijn, bijv. "ontwerp een philinkcombinatie, waarbij ... mensen rond de combinatie kunnen plaatsnemen" of "ontwerp een philinkcombinatie, waarbij ... bureaus aaneengeschakeld zijn".

Met de philinktafels hebben de ontwerpers eens te meer een link gelegd tussen wiskunde, praktische zin, creativiteit en schoonheid. Hopelijk is dit ook wat de leerlingen via deze onderzoeksopdracht ervaren!